

# Algebraic K- theory of finitely generated projective modules on ring spectra

著者	小原 まり子
号	70
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	理博第2939号
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/64230">http://hdl.handle.net/10097/64230</a>

# 論文内容要旨

(NO. 1)

氏 名	小原 まり子	提出年	平成 27 年
学位論文の 題 目	Algebraic K-theory of finitely generated projective modules on ring spectra (環スペクトラ上の有限生成射影加群を用いた代数的 K 理論)		

## 論文目次

Chapter 1 Introduction
Chapter 2 Preliminary
Chapter 3 Algebraic K-theory of infinity categories
Chapter 4 Relative categories and Dwyer-Kan localization
Chapter 5 Classical spectra and module spectra
Chapter 6 Comparison of infinity categorical and Waldhausen's K-theory
Chapter 7 Subcategories of perfect R-modules and its K-theory
Chapter 8 The proof of $K(\text{Mod}_R^{\text{proj}}) \simeq K(\text{Mod}_R^{\text{perf}})$
Chapter 9 Proof of Theorem 1.0.2

## 内 容 要 旨

代数的 K 理論は 1970 年代に Quillen により定式化され、その後 Waldhausen がより一般的な形で定義した空間である。この空間は代数多様体の重要な不変量と考えられている。近年では Lurie により導入された無限圏の道具を用いて代数的 K 理論の特徴付けが行われた。また特別な場合に無限圏の代数的 K 理論を通常の圏の代数的 K 理論で記述する研究もなされている。

また 1970 年代には Elmendorf-Kriz-Mandell-May が、スペクトラの圏の環対象  $R$  に対し  $R$  加群スペクトラとよばれるスペクトラを定式化した。Lurie が導入した  $R$  加群スペクトラのなす無限圏のホモトピー圏は、Elmendorf-Kriz-Mandell-May の  $R$  加群スペクトラのホモトピー圏と圏同値になっているという意味でその無限圏版を与えている。

本学位論文は可換環スペクトラ上の有限生成射影加群のなす無限圏で定義した代数的 K 理論の性質についての研究をまとめたものである。連結環スペクトラム  $R$  に対し、有限個の 0 でないホモトピー群をもつ  $R$  加群スペクトラで、そのホモトピー群が  $R$  の 0 次ホモトピー群上有限生成になるものを coherent とよぶ。Blumberg-Mandell (2008) は、coherent な  $R$  加群スペクトラの圏の代数的 K 理論が  $R$  の 0 次ホモトピー群上有限生成な加群の圏の代数的 K 理論と同値になることを示した。Barwick-Lawson (2014) は連結正則な環スペクトラム  $R$  に対し、coherent な  $R$  加群スペクトラのなす無限圏の代数的 K 理論が  $R$  の 0 次ホモトピー群上有限生成な射影加群の圏の代数的 K 理論と同値になることを示した。これらの研究は安定な圏の代数的 K 理論に対し行われており、有限生成射影加群の無限

圏に対しては直接には適用できなかった。

本論文では有限個の 0 でないホモトピー群をもつ可換環スペクトラ上の、有限生成射影加群の無限圏の代数的  $K$  理論を、通常の有限生成射影加群の圏の代数的  $K$  理論で記述出来るかという問題を中心に考察した。以下、各章の概略を述べていく。

まず第 2, 3, 4 章で無限圏や、基点付き無限圏とそこに於ける  $w$ -cofibrations と呼ばれる射の族を用いて定められる代数的  $K$  理論、相対的圏の理論の概略をまとめた。本論文ではこれらの道具を用いることにより研究を行っている。

第 5 章以降において出てくる、Elmendorf-Kriz-Mandell-May によるスペクトラの圏の環対象  $R$  上の加群スペクトラを、以降 EKMM の  $R$  加群スペクトラと略記する。EKMM の  $R$  加群スペクトラのなす圏はモデル圏になり、写像シリンダーと写像道空間をもつ。このことにより、コファイブラント対象間の写像シリンダーによる射の分解、ファイブラント対象間の写像道空間による射の分解が成り立つ。また写像シリンダーを持つモデル圏の部分圏で弱同値に閉じるものは上記のような性質をもつ写像シリンダーを含むことがわかる。第 5 章前半ではまずこれらについての基本事項をまとめた。そして後半では、EKMM の  $R$  加群スペクトラのなす圏と Lurie の意味での  $R$  加群スペクトラのなす無限圏を関係付けるため、対称  $R$  加群スペクトラを導入した。対称  $R$  加群スペクトラの圏には正安定モデル構造が入るのだが、Schwede により正安定モデル構造付きの対称  $R$  加群スペクトラの圏は EKMM の  $R$  加群スペクトラの圏と Quillen 同値であるという結果について紹介し、それを用いて EKMM の  $R$  加群スペクトラの圏の相対的ナーブと Lurie の  $R$  加群スペクトラのなす無限圏が同値であることを証明した。

第 6 章では代数的  $K$  理論における Blumberg-Mandell (2008) および Blumberg-Gepner-Tabuada (2013) の考察を紹介した。まずはじめに弱  $w$ -cofibration の概念を導入し、関手的分解条件とよばれる、任意の弱  $w$ -cofibration が  $w$ -cofibration と弱同値の合成に分解するという条件及び、弱同値がホモトピー圏で同型であることと必要十分であるという仮定をつけた Waldhausen 圏のもとでは、その Waldhausen 圏の代数的  $K$  理論が、無限圏における  $w$ -cofibrations に付随する代数的  $K$  理論と同値であるという結果について述べた。この結果は、EKMM の加群スペクトラの圏の弱同値に閉じる充滿部分圏を Hurewicz cofibrations により Waldhausen 圏とみなした時に適用することが出来る。

連結環スペクトラム  $R$  が coherent とは  $R$  の 0 次ホモトピー群の任意のイデアルが有限表示であり、さらに任意の  $n$  に対し  $R$  の  $n$  次ホモトピー群が 0 次ホモトピー群上有限表示になるときに言う。第 7 章では可換環スペクトラム  $R$  に coherent 性を仮定し、Tor-amplitude が  $n$  以下の連結な  $R$  加群スペクトラのなす部分圏の定義を、 $R$  加群スペクトラのなす無限圏と EKMM の  $R$  加群スペクトラの圏において各々与えた。Tor-amplitude の  $n$  を動かすと部分圏の列が出来る。これにより、完全  $R$  加群の無限圏と、対応する EKMM の  $R$  加群スペクトラの圏における部分圏のフィルトレーションを導入した。ベースの可換環スペクトラム  $R$  に coherent 性を仮定したことにより、各部分圏は弱同値に閉じる。この列の  $n = 0$  のときに有限生成射影加群の無限圏であり、 $n$  に対し余極限をとると連結な完全加群のなす無限圏がでる。本章後半では相対的ナーブによりそれら 2 つの部分圏の列が同値になることを証明した。

Quillen の代数的  $K$  理論で成り立つ性質の一つに、resolution 定理と呼ばれる、圏の適切な列に対して、それらの代数的  $K$  理論が同値であることをいう定理がある。最近、Mochizuki (2013) により Waldhausen の代数的  $K$  理論においても強 resolution 定理という、resolution 定理の仮定を強めた定

理が示された。第 8 章では強 resolution 定理を適用するための条件を吟味し、実際に適用した。まず第 7 章で導入した EKMM の  $R$  加群スペクトラの圏の部分圏の列が関手的分解条件をみたす Waldhausen 圏であることを示し、このことを用いて強 resolution 定理の条件を  $m=1$  の時に満たしていれば任意の  $m$  で満たすことを示した。またこの部分圏の列が  $m=1$  の時に強 resolution 定理の仮定を満たすことを示し、定理を適用した。また第 6 章で言及した無限圏の代数的  $K$  理論と適切な条件を満たす Waldhausen 圏の代数的  $K$  理論の同値性を適用して、EKMM の  $R$  加群スペクトラの圏の部分圏の列から定まる Waldhausen の代数的  $K$  理論と無限圏における部分圏の列により定めた代数的  $K$  理論の同値を示した。また代数的  $K$  理論をとる操作が filtered colimits と可換であることを用いて、完全加群の無限圏の代数的  $K$  理論と有限生成射影加群の無限圏の代数的  $K$  理論の同値を示した。この命題自体は Lurie が講義で無限圏の設定で主張を示している。しかし我々の証明は EKMM の  $R$  加群スペクトラの圏を経由し強 resolution 定理を適用するので完全に異なるものである。

第 9 章では本論文の主結果を示した。本論文の主結果は主に各々第 7 章と第 8 章で示した 2 つの結果から導出されている。1 つ目は EKMM の  $R$  加群スペクトラの圏と Lurie の意味での加群の圏の比較である。2 つ目は 1 つ目で得られた比較により EKMM の  $R$  加群スペクトラの圏に強 resolution 定理を適用すれば、Lurie の意味での完全加群の無限圏と有限生成射影加群の無限圏の代数的  $K$  理論の比較が出来ることである。本章では環スペクトラム  $R$  が有限個の 0 でないホモトピー群しか持たない時、その上の完全加群や有限生成射影加群も有限個のホモトピー群しか持たないことを示した。環スペクトラム  $R$  の正則性は Barwick-Lawson (2014) により考察されているが、彼らの結果の完全加群の圏を有限生成射影加群で置き換えることにより主結果が得られる。

## 論文審査の結果の要旨

小原まり子氏提出の本博士論文では、connectiveな環スペクトラの有限生成射影的加群の無限圏に対する代数的K理論と有限生成完全加群の無限圏に対する代数的K理論の比較同型を示して、正則かつconnective環なスペクトラの場合に有限生成射影的加群の無限圏に対する代数的K理論は通常の環の代数的K理論と同値になることを証明することで、環スペクトラの代数的K理論に新しい見地を与えた。

本博士論文では、Lurieの無限圏の理論とElmendorf-Kriz-Mandell-Mayによるスペクトラの理論を、モデル圏の概念を駆使することで相対ナーブ関手を通して比較同型を示している。この比較定理には、SchwedeやAndoらによる 90 年代後半からのこの分野の展開を十分に理解した上のものである。さらに、この同型が、最近のBlumberg-Gepner-Tabuadaの理論を適用することで、代数的K理論の間の同値性を誘導することを示している。

Elmendorf-Kriz-Mandell-Mayによるconenctiveな環スペクトラ上の有限生成完全加群の圏に増加部分環列を定めて、それらの部分圏の間の代数的K理論の比較同型をMochidukiによる比較定理を適用することで、先に述べたElmendorf-Kriz-Mandell-MayとLurieの理論との比較を合わせることで、主結果の一つである射影加群と完全加群の代数的K理論の同値性を与えている。これは独創的な手法で、高く評価されるものである。

本論文の主結果の一つである射影加群の無限圏と完全加群の無限圏の代数的K理論の比較同値は、この分野の世界的なトップランナーであるLurieも彼の講義ノートの中で証明を与えている。小原氏の方法は、Lurieの方法とは異なり、Elmendorf-Kriz-Mandell-Mayらによる環スペクトラの理論との比較を用いていて、より大きな枠組みで行う新しい議論のもとでの証明である。

以上のことから、本博士論文は小原氏が自立して研究活動を行うのに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、小原まり子氏提出の博士論文を、博士（理学）の学位論文として合格と認める。